

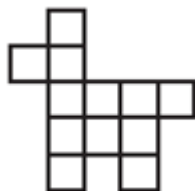
МБОУ «Новотаволжанская СОШ имени Героя Советского Союза И.П. Серикова
Шебекинского муниципального округа Белгородской области»

Задания для подготовки обучающихся, проявляющих
способности по предмету «Математика», к всероссийской
олимпиаде школьников

Подготовила:
Саватеева Ирина Викторовна,
учитель математики

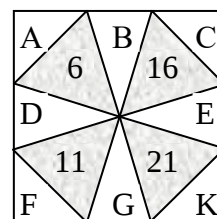
2024-2025 учебный год

1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 3х4 клетки. Разрежьте его по сторонам клеток на 3 части так, чтобы из них можно было сложить фигуру,



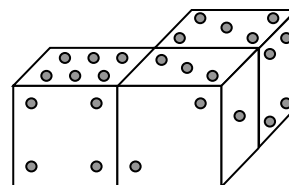
изображенную справа.

2. Замените буквы А, В, С, D, E, F, G, К цифрами от 1 до 8 без повторений так, чтобы числа 6, 11, 16, 21 в серых треугольниках являлись суммами цифр, стоящих в трёх белых треугольниках, соседствующих по сторонам с серым.



3. Рыбак поймал 6 кг рыбы. Часть приготовил себе, остальное отдал трём котам. Каждый кот съедает в 2 раза больше рыбы, чем рыбак за одно и то же время. Сколько килограммов рыбы было отдано котам, если есть все начали одновременно, а коты съели свою часть в 2 раза быстрее, чем рыбак?

4. Три одинаковых кубика приставлены друг к другу гранями с одинаковым числом очков. Найдите сумму чисел на трёх нижних гранях кубиков данной конструкции, на верхних гранях которых числа 3, 5 и 6.



5. Лиса Алиса, Буратино и Пьеро нашли 110 золотых монет. Алиса предложила разложить их на три кучки и сказала: "Пусть **жребий** определит, кому какая достанется!" Чтобы мальчики не расстраивались, они договорились уравнивать свои кучки по меньшей, а лишнее отдать Алисе. (Например, если Буратино достанется 10 монет, Пьеро – 15, а Алисе – 85 монет, то Пьеро отдаст Алисе 5 монет, чтобы у него с Буратино стало поровну). Алисе необходимо разложить все монеты на три кучки так, чтобы в результате ей наверняка досталось не меньше 100 золотых монет. Сколько у нее есть вариантов?

Решение

- 1.Решение:** вариант разрезания приведен: 1-я часть с цифрами «1», 2-я часть – «2» и 3-я часть – «3». Из них легко складывается нужная фигура.

1	1	1	2
1	1	2	2
1	1	1	3

- 2.Решение:** Подходящие значения букв: А=2, В=3, С=5, D=1, Е=8, F=4, G=6, К=7. Легко проверить, что условие задачи выполняется.

3. Ответ: 4,5 кг.

Решение: Пусть рыбак съедает одну часть рыбы за время поедания рыбы котами, тогда каждый кот за это время съест 2 части, а три кота съедят $2 \cdot 3 = 6$ частей. Рыбак по времени ел дольше в 2 раза. Значит, когда коты закончат есть, он съест ещё столько же рыбы, то есть в результате рыбак съест 2 части рыбы, а вместе за отведённое время они съедят $6 + 2 = 8$ частей или 6 кг рыбы. Тогда одна часть - это $6/8$ кг, что равно $3/4$ кг. В результате коты съели $6 \cdot 3/4 = 4,5$ кг рыбы.

Другое решение. Пусть рыбак съедает x кг рыбы за 1 час, тогда один кот съест $2x$ кг/ч. Пусть коты ели рыбу t часов, тогда рыбак ел в 2 раза медленнее, то есть $2t$ часов. В результате чего 6 кг рыбы было съедено. Получается, что рыбак съел $2xt$ кг рыбы, а один кот - $2xt$ кг. Составим уравнение: $2xt \cdot 3 + 2xt = 6$. Следовательно, $xt = 6/8 = 3/4$ кг, тогда котам было отдано $2 \cdot 3 \cdot xt = 6 \cdot 3/4 = 4,5$ кг рыбы.

4. Ответ: 7

Решение: Заметим, что передние два кубика соприкасаются гранью с цифрой 5, так как все остальные числа мы видим на гранях этих кубиков. Значит, напротив грани с числом 1 находится грань с числом 5 (1-5). Аналогично, рассмотрев угловой и задний кубики, замечаем, что они соприкасаются гранью с числом 6. Значит, напротив грани с числом 2 находится грань с числом 6 (2-6). Следовательно, третья пара противоположных граней будет содержать числа 3 и 4. Таким образом, на нижних гранях конструкции будут числа 1, 2 и 4. Их сумма равна 7.

5. Ответ: 15.

Решение: В конечном итоге у мальчиков должно быть одно и то же количество монет. Количество монет одного мальчика примем за x , тогда у лисы будет $110 - 2x$ монет, значит $110 - 2x \geq 100$ или $x \leq 5$. Алисе важно, чтобы две какие-то кучки содержали не больше 5 монет в каждой, то есть ей нужно раскладывать монеты одним из 15 способов: (5, 5, 100), (5, 4, 101), (5, 3, 102), (5, 2, 103), (5, 1, 104), (4, 4, 102), (4, 3, 103), (4, 2, 104), (4, 1, 105), (3, 3, 104), (3, 2, 105), (3, 1, 106), (2, 2, 106), (2, 1, 107), (1, 1, 108).

Докажем, что остальные варианты не подойдут. Действительно, во всех остальных случаях найдутся две кучки с числом монет больше 5. Тогда в худшем для Алисы случае мальчикам могут достаться эти кучки. Тогда у них даже после уравнивания будет в сумме больше 10 монет, а у Алисы меньше 100.

Литература для подготовки

1. Фарков, А. В. Учимся решать олимпиадные задачи : Геометрия 5-11 классы / А. В. Фарков. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 126 с.
2. Математическая литература МЦНМО: <http://ilib.mccme.ru/> и <http://www.mccme.ru/free-books/> База задач <http://www.problems.ru/>
3. Шарыгин И.Ф. Математика. Решение задач. М., Просвещение, 2007. 12. Т. И. Голенищева–Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарёв, Г. А.

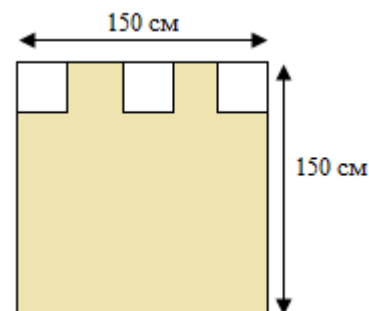
Мерзон, И. В. Яценко. Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Части I и II, М., МЦНМО, 2010

4. Перельман, Я. И. Математика в занимательных рассказах / Я. И. Перельман. – 2009

5. Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки - к профессии / Под общ. ред.: А. А. Заславский, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков. М. : МЦНМО, 2018.

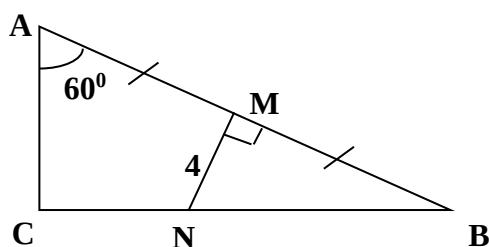
1. Сколько раз в последовательности из 12 чисел: 2, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, 1 (на первом месте стоит 2, на последнем месте 1) встретится цифра 2, если известно, что сумма любых трех чисел, идущих подряд, равна 5?

2. На турнир «рыцарей и лжецов» математического кружка ребята мастерили из квадратного листа картона размером 150см×150см стену рыцарского замка. По краям и в середине было вырезано три одинаковых квадрата. Петя заметил, что при этом периметр первоначального листа увеличился на 8%. Найдите площадь получившейся «стены».

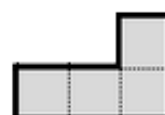


3. Петя и Вася живут в одном доме и выходят в школу одновременно. Петя сначала считает ворон и идет со скоростью 4 км/ч, но ровно на середине пути на парковке пересаживается на велосипед и едет со скоростью 12 км/ч. Вася идет в школу с постоянной скоростью и приходит в школу одновременно с Петей. Учитель Степан Иванович на середине пути обгоняет Петю на мопеде, так как его скорость в 5 раз больше скорости Васи, он приезжает в школу на 3 минуты раньше мальчиков. Найдите расстояние от дома мальчиков до школы.

4. По данным, изображенным на рисунке справа, найти длину катета ВС прямоугольного треугольника ABC.



5. Какое наибольшее число «тетраминошек» (как на рисунке) можно разместить внутри квадрата 6×6 без наложений? Фигурки можно как угодно поворачивать и переворачивать.



Решение

1. Ответ: 8 раз.

Решение: Очевидно, что через каждые две позиции от первой «2» тоже стоят «2»: 2, _, 2, _, 2, _, 2, _, 1. Предпоследняя цифра может быть только «2»: 2, _, 2, _, 2, _, 2, 1. В каждой паре оставшихся соседних чисел ровно одна «2» и одна «1». Получаем последовательность содержащую 8 двоек: 2,2,1,2,2,1,2,2,1,2,2,1.

2.

Ответ: 20772 см².

Решение: Периметр изменился за счет прибавления длин двух сторон квадрата:
 $600 + 2x = 648 \Rightarrow x = 24 \text{ см}$. $S = 150^2 - 3 \cdot 24^2 = 20772$

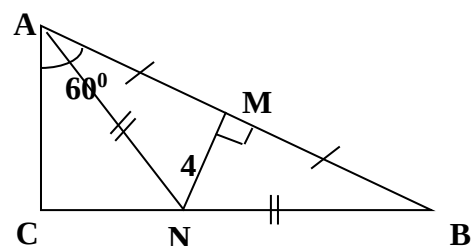
3. Ответ: 2 км.

Решение: Обозначим путь от дома до школы через S , тогда $\frac{S}{8} + \frac{S}{24} = \frac{S}{6}$. Значит, скорость Васи равна 6 км/ч, а скорость Степана Ивановича – 30 км/ч. Из того, что учитель проезжает половину от расстояния S на 3 минуты быстрее, получаем

уравнение: $\frac{S}{24} - \frac{S}{60} = \frac{3}{60} \Rightarrow S = 2 \text{ км}$

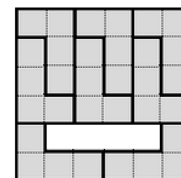
4. Ответ: 12.

Решение: Проведем AN . Треугольник ANB равнобедренный ($AN=NB$), так как прямоугольные треугольники AMN и NMB равны по двум катетам. Тогда углы ABN , NAB и NAC равны по 30° . Применяем теорему о катете, лежащем против угла 30° к треугольникам BMN и ACN , находим $BN=8$, $CN=4$. Значит $BC=12$.



5. Ответ: 8.

Решение: Раскрасим квадрат, чередуя полосы. Тетраминошка всегда занимает три клетки одного цвета и одну другого – нечетное число. Теоретически максимально возможно разместить $36:4=9$ тетраминошек – нечетное число. Если бы так получилось сделать, то белых (ровно как и покрашенных) клеток было бы покрыто нечетное число, но их 18 – противоречие. Пример размещения 8 тетраминошек:



Литература для подготовки

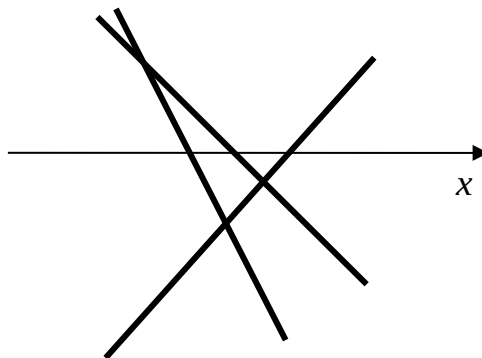
1. Фарков, А. В. Учимся решать олимпиадные задачи : Геометрия 5-11 классы / А. В. Фарков. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 126 с.
2. Математическая литература МЦНМО: <http://ilib.mccme.ru/> и <https://www.mccme.ru/free-books/> База задач <http://www.problems.ru/>
3. Шарыгин И.Ф. Математика. Решение задач. М., Просвещение, 2007. 12. Т. И. Голенищева–Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарёв, Г. А. Мерзон, И. В. Ященко. Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Части I и II, М., МЦНМО, 2010
4. Перельман, Я. И. Математика в занимательных рассказах /

Я. И. Перельман. – 2009

5. Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки - к профессии / Под общ. ред.: А. А. Заславский, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков. М. : МЦНМО, 2018.

9класс

1. Назовем прямоугольник «симпатичным», если его длинная сторона меньше удвоенной короткой. (В частности, квадрат является симпатичным прямоугольником). Разрежьте квадрат площади 100 на четыре симпатичных прямоугольника с площадями 10, 20, 30 и 40.
2. В системе координат изобразили графики функций $y = x + a$, $y = ax + b$ и $y = bx$. Причем ось Oy , идущую, как обычно, «снизу вверх» перпендикулярно оси Ox , стерли. Восстановите ось Oy .
3. Винни-Пух заготовил мёд на зиму в нескольких полных горшочках по 5 литров каждый. Если бы он свои запасы мёда разлил в 4-литровые горшочки, то их потребовалось бы на четыре больше, правда, один



горшочек оказался бы неполным. А если разлить весь мёд в горшочки по 7 литров, то их потребовалось бы на четыре меньше первоначального количества. Но один горшочек снова оказался бы неполным. Сколько горшочков мёда заготовил Винни-Пух?

4. Из вершин A , B и C треугольника ABC провели соответственно медиану AM , биссектрису BK и высоту CH . Оказалось, что середина отрезка BK совпадает с серединой отрезка MH . Найдите углы треугольника ABC .

5. На каникулах для всех желающих провели турнир по шашкам. Каждый сыграл с каждым ровно одну партию. За победу в партии участник турнира получал 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш – 0 очков. Известно, что среди участников мальчиков было в десять раз больше, чем девочек, и они вместе набрали в 4,5 раза больше очков, чем девочки. Сколько очков набрала самая успешная девочка?

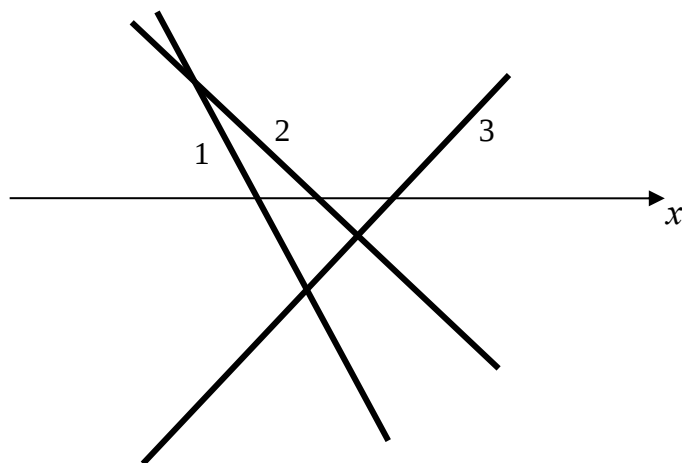
6. Девятиклассник Дима выписывает ряд последовательных трёхзначных чисел так, чтобы каждое число делилось нацело на свою последнюю цифру. Какое наибольшее количество чисел могло быть в этом ряду?

Решение

1. **Решение:** Годится, например, такое разрезание: сначала разрежем исходный квадрат на прямоугольники 4×10 и 6×10 . Первый из них разрежем на прямоугольники $4 \times 2,5$ и $4 \times 7,5$. Второй прямоугольник разрежем на прямоугольники $6 \times \frac{10}{3}$ и $6 \times \frac{20}{3}$.

В каждом из них длинная сторона меньше удвоенной короткой и площади удовлетворяют условию задачи.

2. **Решение:** Занумеруем графики функций, как показано на рисунке. Графики 1 и 2 имеют отрицательный угловой коэффициент, а график № 3 – положительный. Тогда третья прямая – это график функции $y = x + a$, при этом $a < 0$ и $b < 0$, т.к. являются угловыми коэффициентами двух оставшихся прямых. Прямая $y = bx$ проходит через начало координат, а прямая $y = ax + b$ пересекает ось Oy в точке $(0; b)$, где $b < 0$. Но в полуплоскости, соответствующей отрицательным ординатам, прямая № 2 располагается «выше» прямой № 1. Значит вторая прямая является графиком функции $y = bx$, и её точка пересечения с осью Ox – это начало координат. Таким образом, ось Oy проходит через точку пересечения второй прямой с осью Ox и перпендикулярно к ней.



3. **Ответ. 15. Решение:** Пусть у Винни-Пуха было n горшочков, тогда общий объем мёда $5n$. По условию $4(n + 3) < 5n < 4(n + 4)$, откуда $12 < n < 16$. Кроме того,

$7(n-5) < 5n < 7(n-4)$, откуда $14 < n < 17,5$. Значит у Винни-Пуха было 15 пятилитровых горшочков.

4. **Ответ.** $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$. **Решение.** 1) Пусть отрезки BK и MH пересекаются в общей середине – точке O . Тогда четырехугольник $BMKH$ – параллелограмм, значит прямая MK параллельна AB . Точка M – середина BC , значит точка K – середина AC . Имеем, что BK – биссектриса и медиана треугольника ABC , значит $AB=BC$. 2) Отрезок OM – средняя линия треугольника BKC , тогда прямая OM параллельна AC , а значит пересекает сторону AB треугольника ABC в точке H – середине AB . Имеем, что CH – высота и медиана треугольника ABC , значит $CA=CB$, т.е. треугольник ABC – равносторонний.

Критерии проверки: Верное решение – 7 баллов. Сделан вывод, что четырехугольник $BMKH$ – параллелограмм, дальнейших продвижений нет – 2 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

5. **Ответ:** 20.

Решение. Пусть в турнире приняло участие x девочек, которые заработали y очков. Тогда в турнире участвовало $10x$ мальчиков, которые заработали $4,5y$ очков. В каждой партии разыгрывают 2 очка, всего $11x$ участников играют $\frac{11x(11x-1)}{2}$ партий. Значит, из условия задачи следует соотношение, $11x(11x-1) = 5,5y$ т.е. $y = 2x(11x-1)$. Заметим, что каждый участник играет $11x-1$ партий. Значит, каждая девочка может набрать максимум $2(11x-1)$ очков, если выиграет все игры. Так как девочки набрали $2x \cdot (11x-1)$ очков, а всего девочек было x , то они выиграли все свои игры. Если бы в турнире участвовало хотя бы две девочки, то в игре между собой они не могли выиграть обе. Значит, была только одна девочка, т. е. $x=1$. Она набрала $2(11x-1) = 20$ очков.

6. **Ответ.** 8, это числа: 841, 842, ..., 848.

Решение: Понятно, что среди выписанных чисел не может быть числа, оканчивающегося на 0, значит, ряд состоит не более, чем из 9 последовательных чисел: $\overline{ab1}$, $\overline{ab2}$, ..., $\overline{ab9}$. Покажем, что 9 чисел быть не могло. По условию $\overline{ab4}$ делится на 4, тогда $b = 0, 2, 4, 6, 8$ – чётное. Число $\overline{ab9}$ делится на 9, значит, $a+b$ делится на 9, но это возможно только если $a+b=9$.

Значит, для первой пары цифр $\overline{ab}$ в этом ряду возможны только варианты: 90, 72, 54, 36 и 18, следовательно, возможны всего 5 последовательностей. Ни один из этих вариантов не возможен, поскольку все 5 последовательностей противоречивы: 908 не делится на 8, 727 не делится на 7, 548 не делится на 8, 367 не делится на 7, 188 не делится на 8.

Из 8 чисел ряд состоять может. Например, 841, 842, ..., 848. Легко убедиться, что каждое из этих чисел делится на свою последнюю цифру.

Литература для подготовки

1. Фарков, А. В. Учимся решать олимпиадные задачи : Геометрия 5-11 классы / А. В. Фарков. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 126 с.

2. Математическая литература МЦНМО: <http://ilib.mccme.ru/> и <https://www.mccme.ru/free-books/> База задач <http://www.problems.ru/>
3. Шарыгин И.Ф. Математика. Решение задач. М., Просвещение, 2007. 12. Т. И. Голенищева–Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарёв, Г. А. Мерзон, И. В. Яценко. Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Части I и II, М., МЦНМО, 2010
4. Перельман, Я. И. Математика в занимательных рассказах / Я. И. Перельман. – 2009
5. Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки - к профессии / Под общ. ред.: А. А. Заславский, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков. М. : МЦНМО, 2018.

10-11 классы

1. Замените все символы «*» целыми числами так, чтобы только одно целое число удовлетворяло одновременно обоим неравенствам: $x^2 + *x + * > 0$ и $x^2 + *x + * < 0$.
2. От 2 кусков сплавов с разным содержанием свинца массой 6 кг и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавляли с остатком другого сплава, после чего процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Каковы массы отрезанных кусков?
3. Вася выписывает последовательность из 2021 натуральных чисел, начиная с некоторого числа, так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел была равна 5. Какое наибольшее количество двоек у него может получиться?
4. Найдите все решения уравнения $x^2 + 2x \sin y + 1 = 0$.
5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AE=BC$, $AC=DE$, $AB+AC=CD$ и сумма углов ABC и CAE равна 180° . Докажите, что $\angle BAC = \angle CDE$.
6. Художник Петров красит плоскость в два цвета произвольным образом, а геометр Васильев утверждает, что сможет построить треугольник с вершинами одного цвета, величины углов которого относятся как 4:2:1. Прав ли он?

Решение

1. **Решение:** Заметим, что неравенство $(x-1)(x-3) > 0$ имеет решение $x < 1, x > 3$. Неравенство $(x-2)(x-5) < 0$ имеет решение $2 < x < 5$. Значит, только одно целое число $x = 4$ удовлетворяет им обоим. В виде квадратных трехчленов это соответственно неравенства $x^2 - 4x + 3 > 0$ и $x^2 - 7x + 10 < 0$.
2. **Ответ:** 4.
Решение: Пусть в первом куске процентное содержание свинца будет $a\%$, а во втором $b\%$. Пусть от первого и второго кусков отрезали по x кг. Тогда получим процентное

содержание свинца в первом сплаве $\left(\frac{(6-x)a}{100} + \frac{xb}{100}\right):6$, а во втором $\left(\frac{(12-x)b}{100} + \frac{xa}{100}\right):12$. Так как они равны, то составляем уравнение и после очевидных преобразований, получаем $3x(b-a) = 12(b-a)$. Поскольку $a \neq b$, то $x=4$.

3. Ответ: 1348.

Решение: Разобьем последовательность из 2021 члена на 673 тройки и еще два числа. Очевидно, что в каждой тройке не может более двух чисел «2» и среди оставшихся двух чисел – максимум две «2». Такой вариант можно реализовать: (2,2,1), (2,2,1), ..., (2,2,1), (2,2). Легко видеть, что сумма любых трех соседних чисел равна 5. Всего чисел «2» 1348 штук.

4. Ответ: $x = \pm 1, y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решение:

$$x^2 + 2x \sin y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x \sin y + \sin^2 y + \cos^2 y = 0 \Leftrightarrow (x + \sin y)^2 + \cos^2 y = 0.$$

$$\text{Получаем систему } \begin{cases} \sin y = -x, \\ \cos y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

5. **Решение:** продлим сторону АВ за точку В и отметим точку F так, что BF=AC. Заметим, что треугольники BFC и ACE равны (BF=AC, BC=AE, $\angle CAE = \angle CBF$), значит EC=CF. Кроме того, равны треугольники AFC и CDE (AB+BF=AF=CD, CF=EC, AC=ED) и, следовательно, равны углы $\angle BAC = \angle CDE$.

6. Ответ: прав.

Решение: покажем, что для любой раскраски плоскости в два цвета требуемый треугольник можно построить. Пусть $A_1 A_2 A_3 \dots A_7$ - правильный семиугольник, нетрудно убедиться, что треугольник типа $A_1 A_2 A_4$ как раз требуемого вида. Действительно, если около семиугольника описать окружность, то углы треугольника $A_1 A_2 A_4$ - вписанные и опираются на дуги, равные $1/7$, $2/7$ и $4/7$ частей окружности. Заметим также, что все треугольники, получающиеся из данного отражениями и поворотами, тоже удовлетворяют условиям.

Покажем, что среди них найдется треугольник с вершинами одного цвета. Допустим это не так, получим противоречие. Во-первых, обязательно найдется пара соседних вершин одного цвета (допустим красного). Так как иначе цвета вершин должны чередоваться, но их нечетное число. Пусть это вершины A_4 и A_5 . Тогда вершины A_2 и A_7 - другого цвета (допустим синего). В этом случае вершины A_3 и A_6 должны быть красными. Но, в этом случае треугольник $A_3 A_5 A_6$ с красными вершинами и удовлетворяет условию о нужном соотношении величин углов.

1. Фарков, А. В. Учимся решать олимпиадные задачи : Геометрия 5-11 классы / А. В. Фарков. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 126 с.
2. Математическая литература МЦНМО: <http://ilib.mccme.ru/> и <https://www.mccme.ru/free-books/> База задач <http://www.problems.ru/>
3. Шарыгин И.Ф. Математика. Решение задач. М., Просвещение, 2007. 12. Т. И. Голенищева–Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарёв, Г. А. Мерзон, И. В. Ященко. Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Части I и II, М., МЦНМО, 2010
4. Перельман, Я. И. Математика в занимательных рассказах / Я. И. Перельман. – 2009
5. Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки - к профессии / Под общ. ред.: А. А. Заславский, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков. М. : МЦНМО, 2018.